

# Behandlung mechanischer Schwinger und Simulation mit Dynasys

## Steckbrief der Unterrichtsreihe:

Thema der Reihe: *Mechanische Schwingungen*  
Jahrgangsstufe: 12 , Grund- u. Leistungskurse  
Dauer: ca. 9 Unterrichtsstunden  
Werkzeuge: - Computergestütztes Messsystem mit Bewegungsumwandler, z. B. CASSY  
              - Computergestütztes Modellbildungssystem, z. B. Dynasys, evtl. auch EXCEL  
Unterrichtsform: *Experimentell, explorativ, handlungsorientiert*

## Übersicht:

1. Einleitung
2. Untersuchung von Reibungseinflüssen ( ca. 3 Std.)
3. Energiebetrachtungen (ca. 2 Std.)
4. Erzwungene Drehschwingungen mit dem Pohlschen Resonator (ca. 4 Std.)
5. Weiterführende Aufgabenstellungen und Modelle zum Thema
6. Literatur und Internetadressen zum Thema

## Vorwort:

„Ein Vorstellungsbild ist so etwas wie eine geistige Landkarte, die jemandem hilft, seinen Weg zu finden“ schreibt der Systemwissenschaftler Kenneth Boulding ([3], S. 54).

„Sehr häufig hat das Wort „Modell“ etwas mit Abbildung zu tun, .... es gibt Modelle von Gebäuden, Landschaften usw. Doch Modelle dieser Art gibt es auch für „Originale“, die es selbst noch gar nicht gibt.“ ... „ Die Arbeit mit Modellen ist eine Möglichkeit, sich mit der Wirklichkeit auseinanderzusetzen, sie erfassbar, analysierbar und kommunizierbar zu machen“ ([2], S. 11).

In diesem Sinne möchte ich den Einsatz der Modellbildung und Simulation im naturwissenschaftlichen Unterricht verstanden wissen. Das Werkzeug „Computergestütztes Modellbildungssystem“ hat die Bedeutung eines Werkzeuges, gleichrangig mit dem konkreten Experimentiergerät, z. B. mit der Stoppuhr, mit der Messlatte und z. B. mit dem Bewegungsmesswandler. Der Anwender sollte wissen, wie diese Werkzeuge funktionieren, damit die Ergebnisse beurteilt werden können. Schülerinnen und Schüler sollten also im Unterricht sowohl die „handwerklichen“ Fähigkeiten des konventionellen Messens von Größen und der computergestützten Messwerterfassung genauso erwerben können wie die Medienkompetenz bezüglich der Modellbildung und Simulation. Darum sehe ich in einer, falls möglich, **parallelen** Nutzung der herkömmlichen und der Neuen Medien eine Chance, im naturwissenschaftlichen Unterricht das Verständnis für Zusammenhänge, aber auch Akzeptanz und Motivation für naturwissenschaftliche Einstellungen und Denkweisen zu fördern.

*Detlev Brünger*

## 1. Einleitung

Schwingungen spielen in vielen Bereichen unserer technischen Umwelt eine bedeutende Rolle. In der Schule, z. B. in Grundkursen wird dieser komplexe Themenkreis in vielen Fällen auf die Behandlung harmonischer Oszillatoren, zumeist auch nur für den reibungsfreien Fall, reduziert, da dieser mit Hilfe mathematischer Mittel auch theoretisch genauer behandelt werden kann. Sowohl die Herleitung der Differentialgleichung für die Schwingung eines Federpendels als auch die Verifikation einer Lösungsfunktion mit Hilfe der Differentialrechnung gelingt i. d. R. nur dann gut, wenn die Schüler über genügend mathematische Voraussetzungen verfügen.

Die Berücksichtigung einer Reibung oder einer erregenden Kraft erschwert die Herleitung einer geschlossenen Lösung in der Schule ungemein oder macht sie gänzlich unmöglich, z. B. wenn die Reibung geschwindigkeitsabhängig ist.

Ein gangbarer Weg, dennoch Schwingungsvorgänge in der Schule ohne aufwendige Mathematik und dennoch anspruchsvoll zu behandeln, scheint mir mit Hilfe der Neuen Medien möglich. Mit Hilfe eines Simulations- und Modellbildungswerkzeuges, z. B. Dynasys, lassen sich reale Schwingungsvorgänge abbilden und auf iterativem Wege Lösungen ermitteln, die es den Schülerinnen und Schülern erlauben, diese zu interpretieren. Sie können selbst weitere „Experimente“ und Untersuchungen am Rechner durchzuführen, selbstständig weitergehende Erkenntnisse gewinnen und ihre Ergebnisse mit dem Realexperiment vergleichen.

Konkret können die Schülerinnen und Schüler die Diagramme bezüglich des Weges, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines Schwingungsvorganges unter verschiedenen Reibungseinflüssen kennen- und interpretieren lernen. Für die durch eine äußerliche periodische Kraft hervorgerufene Schwingung lassen sich insbesondere Voraussagen über das Schwingungsverhalten in Abhängigkeit der Erregerfrequenz unter Berücksichtigung unterschiedlich großer Reibungskräfte treffen (z. B. der Resonanzfall).

Folgendes methodisches Vorgehen scheint mir dabei sinnvoll:

### 1. Einführende Realexperimente

*Frequenzmessungen mit der Stoppuhr in Abhängigkeit von der Federkonstanten  $D$  und der Pendelmasse  $m$ .*

### 2. Modellbildung

*Theoretischer Ansatz, Aufstellung der Differentialgleichung, Schülerübungen mit dem Modell*

### 3. Überprüfung des Modells

*Vergleich von Realexperiment und Simulation*

### 4. Erweiterung und Modifizierung des Modells

*Auswertung und Voraussagen mit Hilfe der Simulationen*

### 5. Zielgerichtete Realexperimente zur Verifikation des Modells

*Wechselspiel zwischen Experiment und Simulation mittels Variation des Experiments und des Modells*

### 6. Ergebnissicherung

*Dokumentation der Ergebnisse durch die Schülergruppe*

Dieses Struktur lässt sich i. a. auch auf die einzelnen Unterrichtsstunden übertragen.

**Thematische Schwerpunkte** bieten sicherlich die unmittelbar beobachtbaren Phänomene, die den Schülern aus Erfahrung zugänglich sind, so z. B.

- die **Dämpfung** der Schwingung durch Reibung

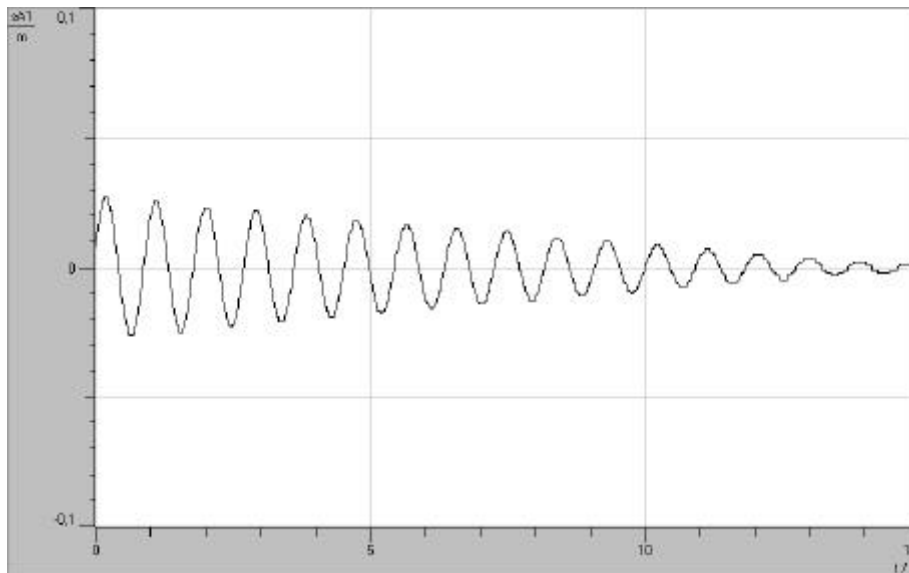
- der damit zusammenhängende **Energieverlust**, bzw. die Energieentwertung
- die **erzwungene Schwingung**, z. B. das Anstoßen bei der Schaukel, Vibrationen eines Motors, etc.

Im folgenden möchte ich zu diesen Schwerpunkten unterrichtliche Möglichkeiten skizzieren, die thematisch und methodisch einen parallelen Einsatz von Experimenten und Neuen Medien nahe legen und die Fruchtbarkeit der Symbiose zwischen konventionellen und den Neuen Medien verdeutlichen können.

## 2. Untersuchung von Reibungseinflüssen

Mit Hilfe eines computergestützten Messsystems, z. B. CASSYLab der Firma LEYBOLD, lassen sich die Messwerte in Form von Tabellen oder Diagrammen darstellen. Die Diagramme werden vervielfältigt und von den Schülern ausgewertet.

Beispiel 1: *Federpendel mit  $D = 25 \text{ N/m}$ ,  $m = 0,55 \text{ kg}$ ,  $s_0 = 0,03 \text{ m}$ .*



**Abb. 1**  
Gedämpfte Feder-schwingung der Frequenz  
 $f = 1,1 \text{ Hz}$ .

Die allgemeine Differentialgleichung für einen gedämpften harmonischen Oszillator ohne Erregung lautet:  $ma + F_R + Ds = 0$ , wobei  $m$  die Pendelmasse,  $a$  die Beschleunigung,  $D$  die Federkonstante und  $F_R$  eine Reibungskraft darstellt, die entweder konstant ist oder irgendwie geschwindigkeitsabhängig sein kann. Hier können zum Beispiel folgende Fälle untersucht werden:

i)  $F_R = k_1$  ; ii)  $F_R = k_2 \cdot v$  und  $F_R = k_3 \cdot v^2$ .

Die Modellstruktur ist relativ einfach. Die Integrationen erfolgen iterativ, d. h. die Elongation  $s$  berechnet das Computerprogramm iterativ mit Hilfe der zeitlichen Änderung derselben. Die Geschwindigkeit errechnet sich durch deren zeitliche Änderung, der Beschleunigung. Aus der Differentialgleichung folgt für die Beschleunigung:

$$a = -\frac{F_R}{m} - \frac{D}{m} \cdot s. \text{ Somit benötigt } a \text{ die Eingangsparameter } F_R, m \text{ und } D.$$

Zu beachten ist aber, dass die Reibung der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist, so dass im Modell der Term  $-\frac{F_R}{m}$  mit dem Vorzeichen der Geschwindigkeit zu multiplizieren ist. Wir

verwenden dazu die Signum-Funktion.

Je nach Art der Reibung gelten also folgende Gleichungen:

$$\text{i) } F_R = k_1 \rightarrow a = -\frac{k_1}{m} \cdot \text{sign}(v) - \frac{D}{m} \cdot s$$

$$\text{ii) } F_R = k_2 \cdot v \rightarrow a = -\frac{k_2 \cdot v}{m} - \frac{D}{m} \cdot s$$

und entsprechend für

$$\text{iii) } F_R = k_3 \cdot v^2 \rightarrow a = -\frac{k_3 \cdot v \cdot |v|}{m} \cdot \text{sign}(v) - \frac{D}{m} \cdot s$$

### Abb.2a Modell 1

Der harmonische Oszillator mit konstanter Reibungskraft  $F_R$ .

#### Zustandsgleichungen

s.neu <- s.alt + dt\*(ds\_nach\_dt)

Startwert s = 0,011

v.neu <- v.alt + dt\*(dv\_nach\_dt)

Startwert v = 0,2

#### Zustandsänderungen

dv\_nach\_dt = a

ds\_nach\_dt = v

#### Konstanten

D = 25

m = 0,55

#### Zwischenwerte

FR = 0,012\*sign(v)

a = -FR/m-D/m\*s

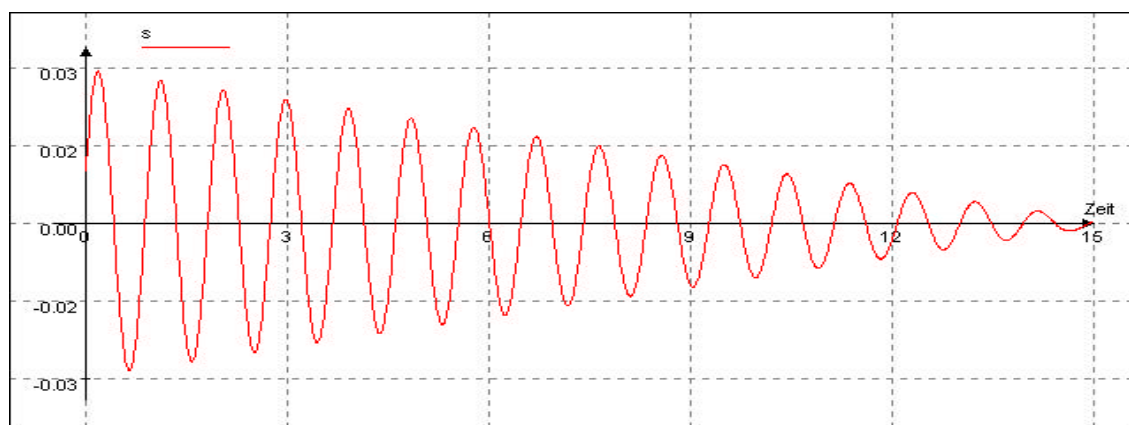
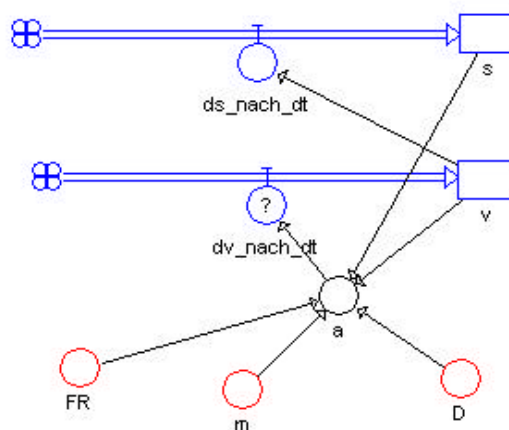


Abb. 2b

Vergleicht man die beiden Kurven in den Abbildungen 1 und 2b, so kommt man zu dem Schluss, dass die Reibungskraft beim Experiment nicht konstant gewesen sein kann, da die Einhüllende der Messkurve keine Gerade ist, sondern einen exponentiellen Abfall aufweist.

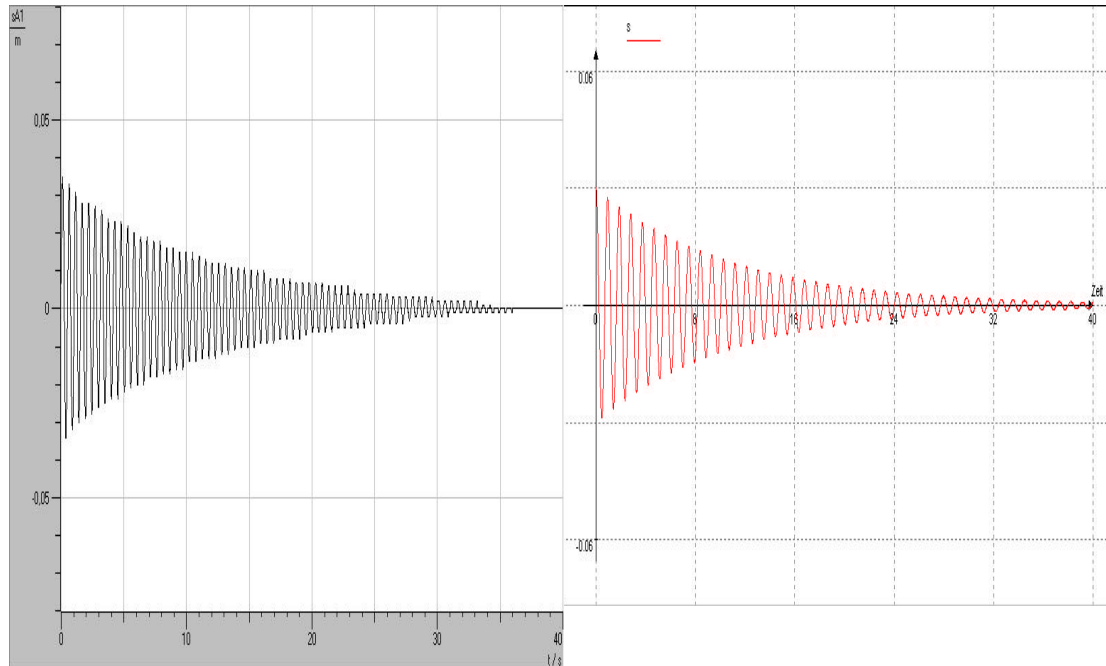
Nimmt man an, dass die Reibungskraft geschwindigkeitsabhängig ist, so muss im Modell die Reibungskraft  $F_R$  entsprechend ii) bzw. iii) modifiziert werden. Experimentell wird der Luftreibungseffekt dadurch verstärkt, dass beim Federpendel oberhalb der pendelnden Masse ein Bierdeckel befestigt wird. In der Simulation werden beide Varianten durchgerechnet und mit dem experimentellen Ergebnis verglichen.

Das experimentelle Ergebnis und das Simulationsergebnis für eine geschwindigkeitsproportionale Reibung in Diagrammform nebeneinandergestellt zeigen deutlich die wesentlichen Übereinstimmungen bezüglich der Amplitudenabnahme und damit die Richtigkeit des Modellansatzes bezüglich der geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft.

**Abb 3** Verstärkte Luftreibung durch einen Bierdeckel  
im Realexperiment

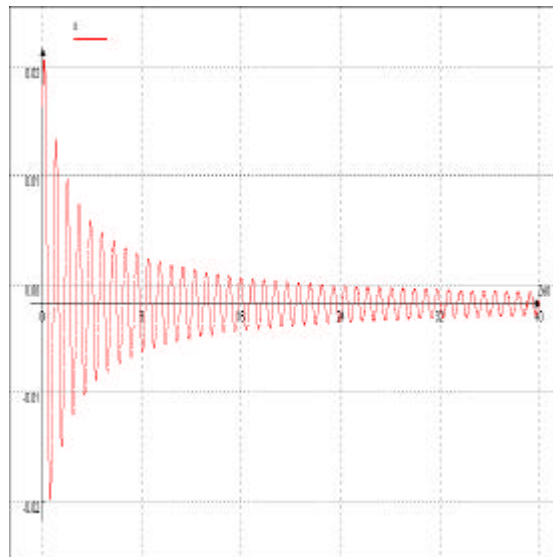
und

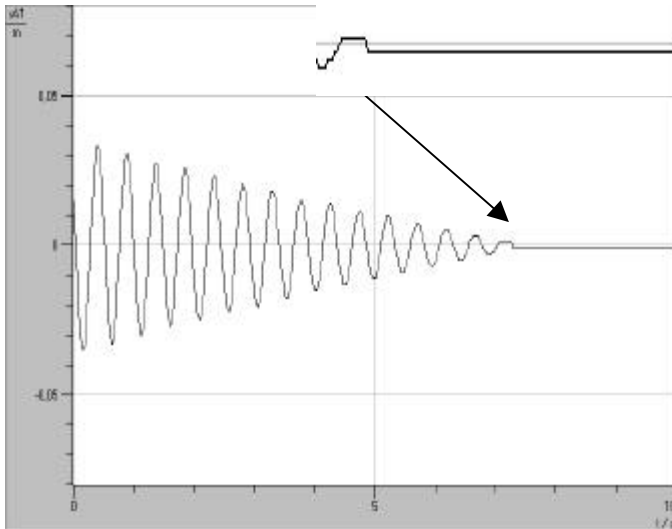
Modell



**Abb. 4**

Im Vergleich dazu zeigt dieses Diagramm die Schwingung für eine geschwindigkeitsquadratabhängige Reibung.





Lässt man dagegen die Pendelmasse an einem Holzbrett während des Schwingungsvorganges reiben, so zeigt das experimentelle Ergebnis sehr große Ähnlichkeit mit der Simulation in **Abb. 2b**. Hier überwiegt offensichtlich die geschwindigkeitsunabhängige Gleitreibungskraft.

In der Zoomdarstellung sieht man übrigens, dass der Pendelkörper in einem deutlich sichtbaren Abstand zur 0-Markierung zur Ruhe kommt. Offensichtlich ist dieses Resultat auf die Haftreibung zurückzuführen.

Im Modell hingegen vollführt der „virtuelle“ Pendelkörper auch für sehr große Zeiten eine fortdauernde Schwingung. Das Modell ist

also zu modifizieren. Eine interessante Aufgabe, die den Schülern überlassen werden kann.

### 3. Energiebetrachtungen

Ein wesentlicher Vorteil des Simulationsprogramms liegt darin, dass ohne experimentellen Aufwand die zeitliche Abnahme der Energie dargestellt werden kann. Das Modell wird erweitert, indem die Energien  $E_{kin}$ ,  $E_{pot}$  und die Gesamtenergie  $E$  mit Hilfe der bekannten Formeln in Abhängigkeit der Zeit berechnet werden.

#### Energiebilanzen im Modell für geschwindigkeitsabhängige Reibung

Abb. 3a

##### Zustandsgleichungen

Startwert  $s = 0,02$

Startwert  $v = 0$

##### Konstanten

$D = 25$

$m = 0,55$

##### Zwischenwerte

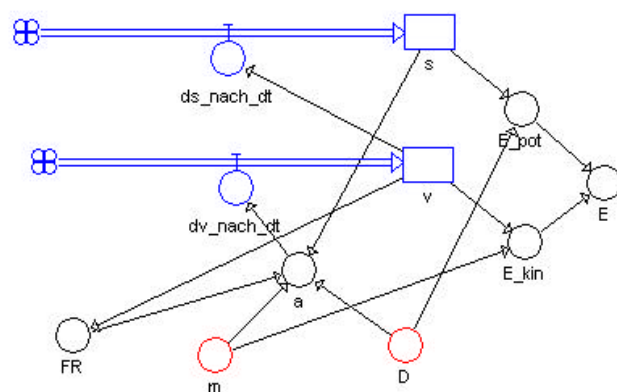
$FR = 0,1 * v * \text{sign}(v)$

$a = -FR/m * \text{sign}(v) - D/m * s$

$E_{kin} = 0,5 * m * v * v$

$E_{pot} = 0,5 * D * \text{Quadrat}(s)$

$E = E_{kin} + E_{pot}$



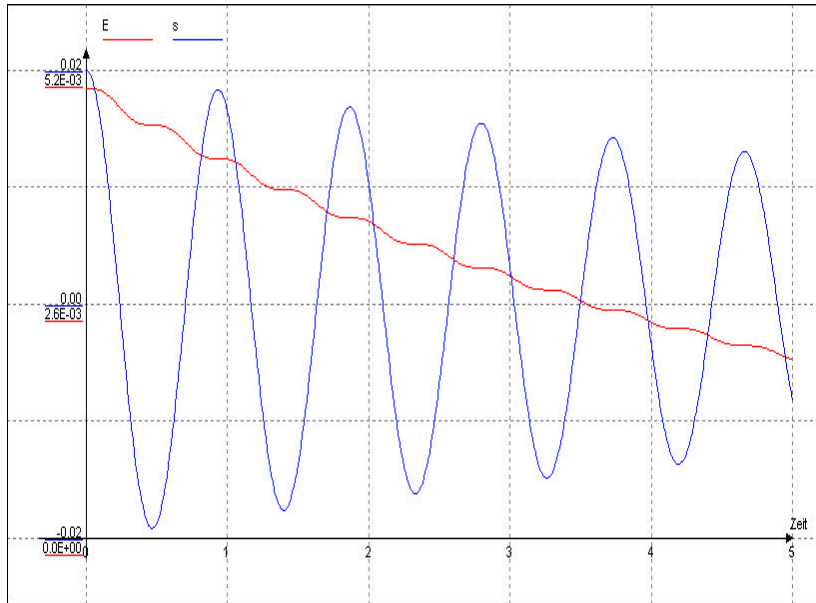


Abb. 4

Ein weiterer Aspekt der Auswertung bietet **Dynasys** durch die Möglichkeit, die Abhängigkeit zweier Größen, z. B. Strecke und Geschwindigkeit im Phasendiagramm darzustellen. Als Beispiel sei hier ein s-E-Phasendiagramm für das gedämpfte Federpendel dargestellt. Zieht man das Phasendiagramm vertikal

auseinander, so sieht man deutlich, dass der Graph an der Stelle  $s = 0$  die betragsmäßig größte Steigung hat, für die Umkehrpunkte jedoch fast waagrecht verläuft.

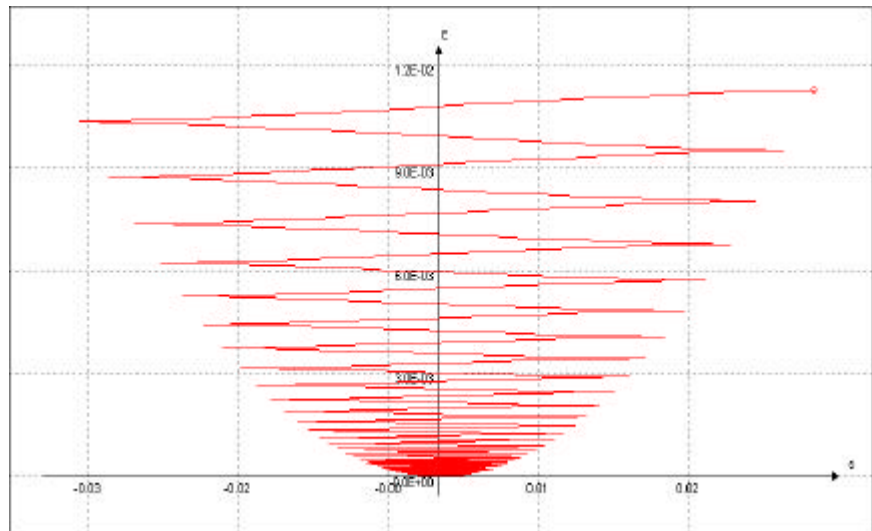


Abb. 3b

Deutlich ist zu erkennen, dass die Energieabnahme nicht rein exponentiell erfolgt, sondern jeweils während des 0-Durchganges, also bei größter Geschwindigkeit, maximal ist. Dieses zu entdecken, ist für Schüler erst durch die graphische Darstellung des Simulationsprogramms möglich. Eine physikalische Begründung für diesen Sachverhalt zu liefern, wird ihnen sicherlich nicht schwer fallen.

#### 4. Erzwungene Drehschwingungen mit dem Pohlschen Resonator

Im Mittelpunkt stehen nun erzwungene Drehschwingungen mit dem Pohlschen Drehpendel. Messgrößen sind hierbei Winkel  $\varphi$ , das durch die Rückstellkraft entstehende Drehmoment des Pendels  $D$ , das Trägheitsmoment  $J$  und das zeitlich veränderliche Erregerdrehmoment  $\Psi_{err}$ .

Da die Drehschwingung, wie auch bei der Federschwingung, mit Hilfe eines Bewegungssensors erfasst wird, bei dem ein Faden über ein Speichenrad mit Lichtschranke läuft, kann hier eine vereinfachte Betrachtungsweise erfolgen, die den Schülern größere Schwierigkeiten erspart und sie dennoch die wesentlichen Zusammenhänge erschließen lässt. In einer kleinen Rille wird ein dünner Faden über den Rand des Pendelrades weiter über das Speichenrad des Messmoduls geführt. Eine kleine Masse ( $m = 2 \text{ g}$ ) dient zur Straffung des Fadens und sorgt für genügend Reibung am Speichenrad, so dass der Faden nicht rutscht. Betrachtet wird nun die lineare Schwingung der kleinen Pendelmasse  $m$ . Die Größen und das Modell für die Federschwingungen können somit übernommen werden, nachdem diese vereinfachte Betrachtungsweise im Unterricht thematisiert wurde und klar ist, dass die Drehwinkelausschläge

proportional zu den zurückgelegten Strecken des Massestückes sind. Neu hinzu kommt die periodisch wirkende erregende Kraft  $F_{err}$ , die mit  $F_{err} = F_0 \sin(w_{err} t)$  beschrieben werden kann. Wir erhalten somit als Grundlage für unser Modell die Differentialgleichung

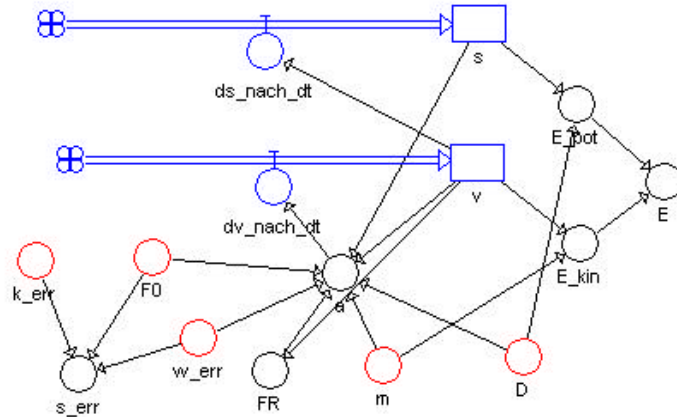
$$ma + F_R + Ds = F_0 \sin(w_{err} t) \text{ beziehungsweise } a = -\frac{k_{err}}{m} \cdot v - \frac{D}{m} \cdot s + F_0 \sin(w_{err} t), \text{ da}$$

im Demonstrationsversuch bei unterschiedlicher Dämpfung, aber ohne Erregung, mittels der Induktionsbremse die Schwingung aufgezeichnet und festgestellt wird, dass hier eine zur Geschwindigkeit proportionale Dämpfung vorliegt. Das Modell der Federschwingung wird entsprechend modifiziert bzw.

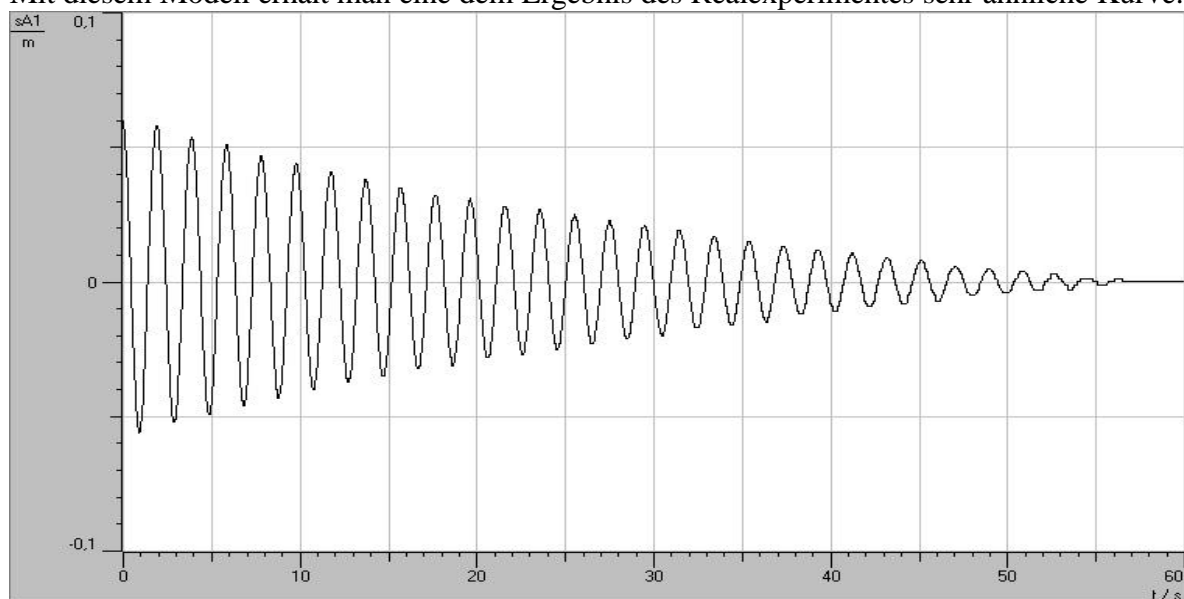
erweitert. Die Eigenfrequenz des Drehpendels beträgt ca.  $w_{eig} = 3,4 \text{ Hz}$ . Damit das Ergebnis der Simulation dem Diagramm des Realexperimentes möglichst ähnlich sieht, ist neben der geschwindigkeitsabhängigen Dämpfung zusätzlich noch eine konstante Dämpfung anzunehmen, da offensichtlich die Gleitreibung an der Achse des Rades zu berücksichtigen ist. Die Konstanten und Zwischenwerte des Modells ohne Erregung sehen also folgendermaßen aus:

$$\text{Konstanten} \quad D = 11,56 \quad m = 1 \quad w_{err} = 4 \quad F_0 = 0 \quad k_{err} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Zwischenwerte} \quad FR &= 0,04 \cdot v + 0,02 \cdot \text{sign}(v) & s_{err} &= F_0/k_{err} \cdot \sin(w_{err} \cdot \text{Zeit}) \\ a &= -FR/m - D/m \cdot s + F_0/m \cdot \sin(w_{err} \cdot \text{Zeit}) \end{aligned}$$



Mit diesem Modell erhält man eine dem Ergebnis des Realexperimentes sehr ähnliche Kurve.

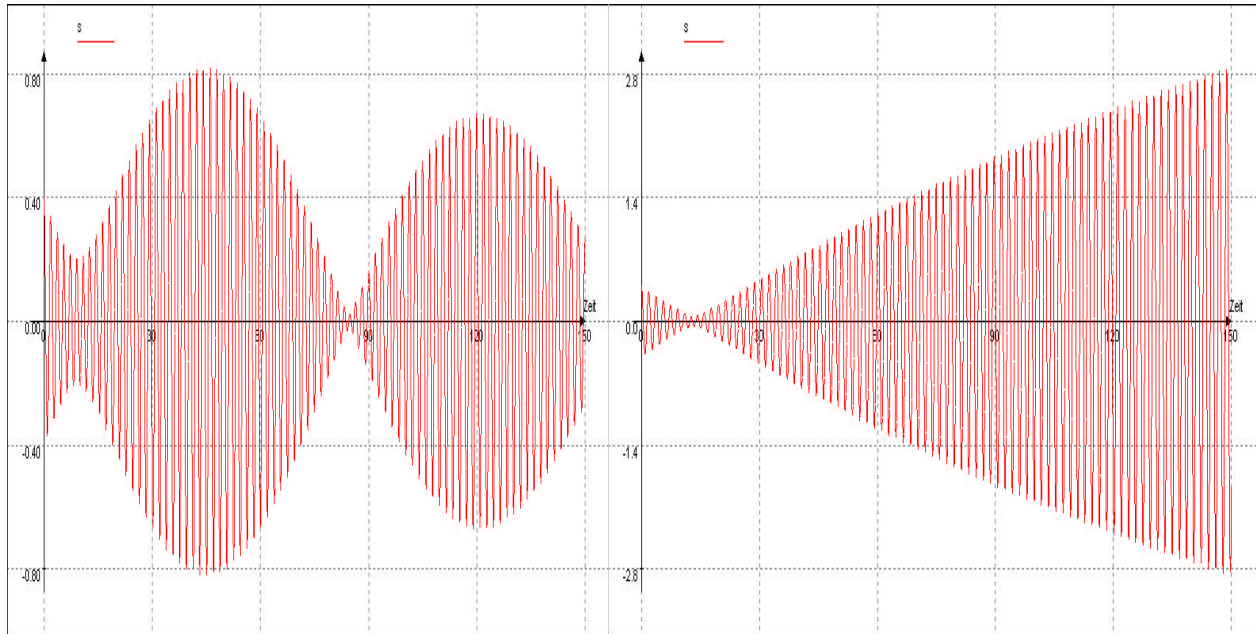


Mit dem Modell können die Schüler weiter experimentieren. Eine erregende Kraft mit  $F_0 \geq 0,1 \text{ N}$  wird angenommen. Die Schülerinnen und Schüler variieren die Erregerfrequenz



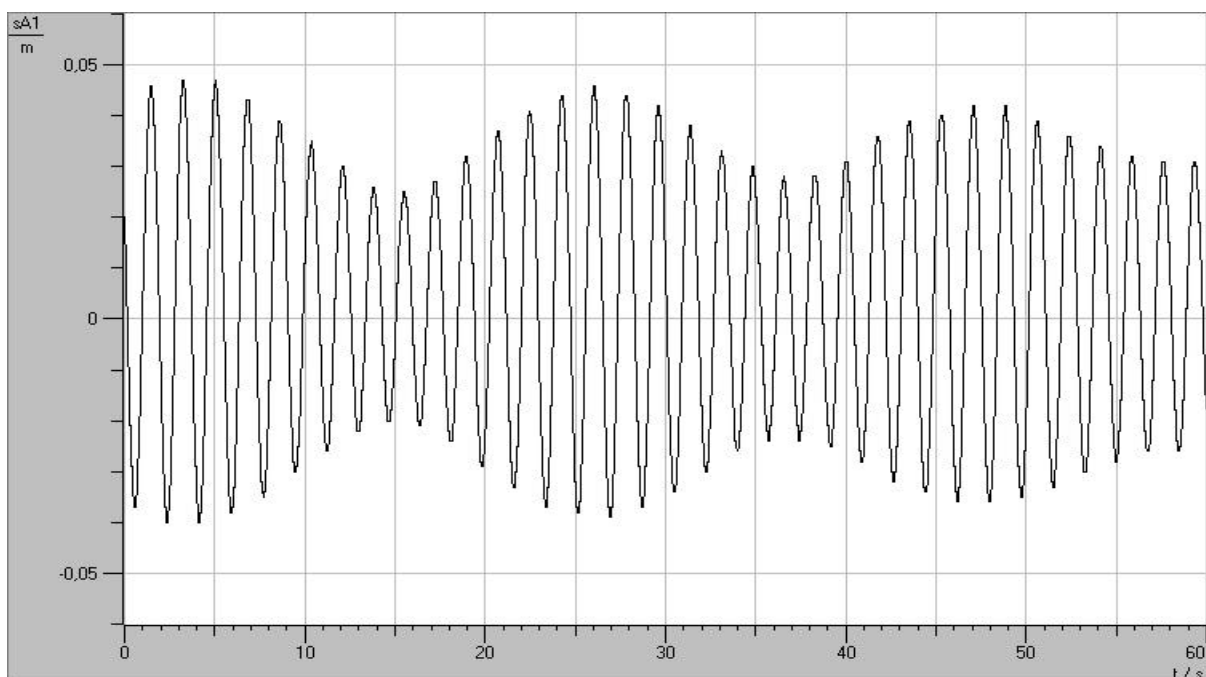
oder die geschwindigkeitsabhängige Dämpfung. Sie können entdecken, dass bei Erregerfrequenzen, die nahe bei der Eigenfrequenz liegen, sogenannte Schwebungen auftreten oder bei Gleichheit der Frequenzen der Resonanzfall eintritt. Weicht die In allen anderen Fällen schwingt das Pendel nach einer gewissen Einschwingphase mit der Frequenz des Erregers mit unterschiedlichen Amplituden. Die durch das Modell gewonnenen Voraussagen können dann im Realexperiment nachgeprüft werden. Es ergibt sich somit ein Wechselspiel von Experiment und Simulation.

Beispiel: *Schwebung und Resonanzfall bei der Simulation*



Konstanten  $D = 11,56$   $m = 1$   $w_{err} = \text{Wurzel}(11)$   $F0 = 0,2$   $k_{err} = 1$   
 Zwischenwerte  $FR = 0,01 \cdot v + 0,00 \cdot \text{sign}(v)$ .

Im Vergleich dazu die Aufnahme einer Schwebung mit dem Messsystem.



Durch Zahlenvergleiche bei genügend vielen Simulationsbeispielen lässt sich der Zusammenhang zwischen der Schwebungsfrequenz und den Frequenzen  $\omega_{err}$  und  $\omega_{eigen}$  ermitteln.

Es gilt bekanntlich:  $\sin(\omega_{eigen} t) + \sin(\omega_{err} t) = 2 \sin\left(\frac{\omega_{eigen} + \omega_{err}}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_{eigen} - \omega_{err}}{2} t\right)$ .

Der mit der kleineren Frequenz variierende Kosinusfaktor beschreibt die Hüllkurve des mit der großen Frequenz variierenden Beitrags des Sinus-Faktors.

Als weiteres Forschungsgebiet für die Schüler bietet sich nochmals die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung an. Durch Variation der Spulenstromstärke lassen sich Schwing-, Kriech- und asymptotischer Grenzfall einstellen und mit Hilfe von Dynasys im s-v-Phasendiagramm darstellen und auswerten (Siehe [1], S.73). Interessant ist insbesondere in diesem Zusammenhang die Darstellung des zeitlichen Energieverlaufes.

Mit den vorliegenden Modellen lassen sich bei geschickter Wahl beeinflussender Parameter für verschiedene Reibungsarten manch interessante Voraussage treffen. Viel Spaß beim eigenen Experimentieren mit Dynasys, denn „dem sinnvoll forschendem Spielen sind kaum Grenzen gesetzt“ ([1], Seite 76)!

## 5. Weiterführende Aufgabenstellungen und Modelle zum Thema

aus ([1]), z. B.:

- Das gedämpfte Fadenpendel (S.77)
- Feder und Gummipendel (S. 88)
- Das Galileische Hemmungspendel (S. 93)
- Kombiniertes Faden- und Federpendel (s. 98)
- Der Pohlsche Resonator mit Unwucht (S. 129)

## 6. Literatur und Internetadressen zum Thema

Literatur:

- [1] Peter Goldkuhle, Modellbildung und Simulation im Physikunterricht, Verlag für Schule und Weiterbildung, Bestellnummer.: 1756
- [2] Rainer Stieglitz, Systemorientierte Modellbildung im fächerübergreifenden Unterricht Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Bestellnummer:1770
- [3] Boulding 1975

Internetadressen:

- [Pohlsches Drehpendel](#) - theoretischer Hintergrund
- [Pohlsches Rad und Chaos](#)
- [Dynasys](#) - Beispielhaftes Neues Medium für den Unterricht (SODIS)
- [Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme](#) von Walter Hupfeld
- [Literaturhinweise](#) Grundlagen – Physikunterricht - Unterrichtswerke